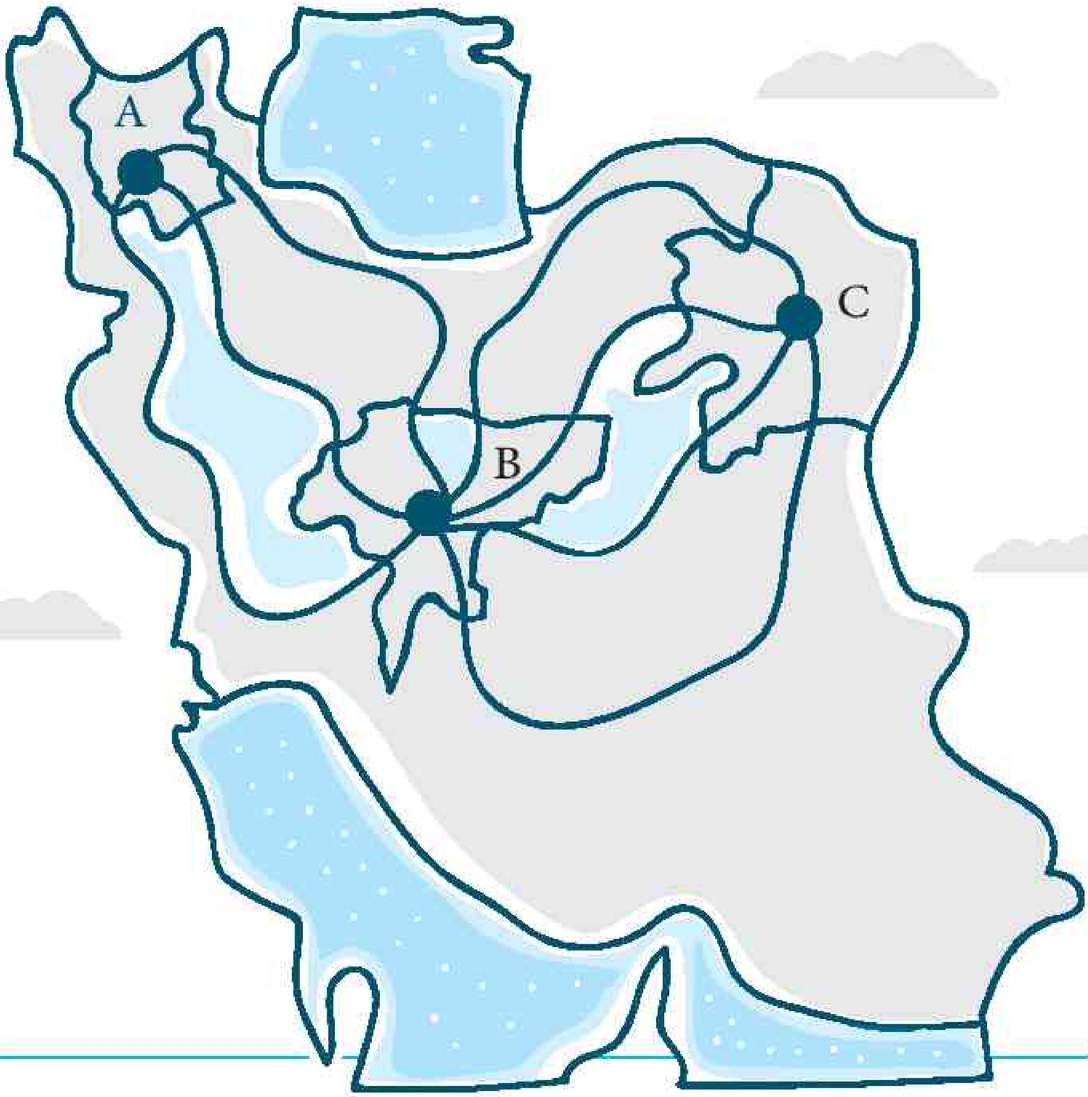
فصل اول

آمار و احتمال



آمار و احتمال

فصل اول

درسنامه

شمارش

شمارش

در زندگی روزمره برای انجام بعضی کارها، انتخاب‌های مختلفی پیش روی ما قرار می‌گیرد. مثلاً می‌خواهیم به شهر مشهد سفر کنیم. برای مسافرت می‌توانیم از ماشین شخصی خود یا قطار یا هواپیما یا اتوبوس استفاده کنیم، پس ۴ انتخاب داریم. یا به یک رستوران رفته‌ایم و برای خوردن شام می‌توانیم از ۱۰ نوع فست‌فود یا ۵ نوع غذای پُرسی یکی را انتخاب کنیم، پس برای این کار $۱۵ = ۵ + ۱۰$ انتخاب داریم. در این نوع از انتخاب‌ها در واقع از قاعده یا اصلی که به اصل جمع، معروف است، استفاده کرده‌ایم. به تعریف این اصل، دقت کنید.

اصل جمع: اگر عملی را بتوان به m طریق و عمل دیگری را بتوان به n طریق انجام داد، به طوری‌که این دو عمل را نتوانیم با هم انجام دهیم، در این صورت به $(m+n)$ طریق می‌توان عمل اول «یا» عمل دوم را انجام داد.

توجه اصل جمع را به بیشتر از دو عمل نیز می‌توان تعمیم داد.

مثال **مادر لعیا برای تولد او می‌خواهد یک اسباب‌بازی بخرد. وقتی وارد مغازه می‌شود، فروشنده به او ۵ نوع بازی فکری، ۴ نوع عروسک و ۱۰ نوع اسباب‌بازی مختلف دیگر را معرفی می‌کند. مادر لعیا برای خرید یک اسباب‌بازی از بین بازی‌های فکری یا عروسک‌ها یا اسباب‌بازی‌های دیگر چند نوع انتخاب دارد؟**

پاسخ این‌که مادر لعیا می‌خواهد فقط یک اسباب‌بازی بخرد و هم‌چنین لفظ «یا» که در صورت سؤال آمده به ما نشان می‌دهند که باید از اصل جمع استفاده کنیم. پس تعداد انتخاب‌های مادر لعیا برابر است با: $۵ + ۴ + ۱۰ = ۱۹$

برای انجام برخی از کارهای دیگر، نحوهٔ انتخاب جور دیگری است. مثلاً می‌خواهیم از بین ۵ پیراهن مختلف و ۲ شلوار مختلف، یک پیراهن و یک شلوار برای پوشیدن انتخاب کنیم. در این حالت برای هر پیراهنی که از بین ۵ پیراهن انتخاب کنیم، باید یک شلوار از بین ۲ شلوار انتخاب شود. پس $۱۰ = ۲ \times ۵$ انتخاب برای ما وجود دارد. برای این انتخاب می‌توانیم از نمودار مقابل که به **نمودار درختی** معروف است نیز استفاده کنیم.

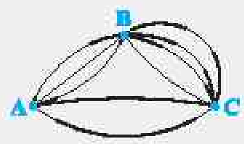
همان‌طور که در این نمودار می‌بینید، تعداد شاخه‌های نهایی برابر ۱۰تا است که همان تعداد انتخاب‌های مطلوب ما می‌باشد.

قاعده‌ای که در این انتخاب‌ها از آن استفاده می‌کنیم به اصل ضرب، معروف است.

اصل ضرب: اگر عملی طی دو مرحلهٔ اول و دوم انجام پذیرد به طوری‌که در مرحلهٔ اول به m طریق و در مرحلهٔ دوم هر کدام از این m طریق به n روش انجام پذیر باشد، در کل آن عمل به $m \times n$ طریق انجام‌پذیر است.

توجه اصل ضرب را به بیشتر از دو مرحله نیز می‌توان تعمیم داد.

مثال **تعداد راه‌هایی که بین ۳ شهر A، B و C وجود دارد در شکل زیر نشان داده شده است. به چند طریق می‌توان:**



الف) از شهر A به شهر B بدون عبور از شهر C رفت و برگشت، به طوری‌که از مسیر رفت، در برگشت، عبور نکنیم؟

ب) از شهر A به شهر C مسافرت کرد؟

پاسخ الف) برای رفتن از شهر A به B بدون عبور از شهر C، ۳ انتخاب داریم ولی چون می‌خواهیم از راهی که رفته‌ایم، برنگردیم. برای رفتن از B به A، ۲ انتخاب خواهیم داشت. بنابراین تعداد راه‌های انتخاب برابر است با: $۳ \times ۲ = ۶$

ب) برای رفتن از شهر A به شهر C می‌توانیم از شهر B عبور کنیم یا بدون عبور از شهر B، مستقیماً به شهر C برویم. پس تعداد انتخاب‌های ما برای سفر از A به C برابر است با:

$$\underbrace{\underset{\text{تعداد راه‌های شهر A به B}}{۳} \times \underset{\text{تعداد راه‌های شهر B به C}}{۴}}_{\text{با عبور از شهر B}} \ \underset{\text{یا}}{+} \ \underbrace{\underset{\text{تعداد راه‌های شهر A به C}}{۲}}_{\text{بدون عبور از شهر B}} = ۱۲ + ۲ = ۱۴$$

! تذکر هرجا بین انتخاب‌ها حرف «یا» وجود داشت، از اصل جمع و هرجا حرف «و» وجود داشت، از اصل ضرب استفاده می‌کنیم.

همیشه یادم بمونه

اصول شمارش

اصل جمع ⟵ عمل اول، m طریق **یا** عمل دوم، n طریق ⟵ انجام عمل اول یا دوم به $m+n$ طریق

اصل ضرب ⟵ مرحلهٔ اول عمل، m طریق **و** مرحلهٔ دوم عمل، n طریق ⟵ انجام عمل به $m \times n$ طریق

۱- رضا وارد یک رستوران می‌شود که در منوی رستوران ۱۰ نوع غذا، ۵ نوع دسر و ۶ نوع نوشیدنی وجود دارد. او به چند طریق می‌تواند یک غذا، یک دسر و یک نوشیدنی انتخاب کند؟

۱) ۲۱ ۲) ۲۰ ۳) ۵۶ ۴) ۳۰۰

۲- سه تا دوست با هم به پارکی می‌روند که در آن ۱۲ وسیلهٔ بازی وجود دارد. این سه نفر به چند طریق می‌توانند این وسیله‌های بازی را برای سوارشدن انتخاب کنند؟

۱) $3^3 \times 2^6$ ۲) ۳۶ ۳) 3^{12} ۴) $2^6 \times 6^{12}$

۳- ۵تا هدیه خریده‌ایم که می‌خواهیم آن‌ها را کادو کنیم. اگر ۷ نوع کاغذ کادو مختلف و از هر نوع به تعداد زیاد داشته باشیم، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) 5^7 ۲) ۳۵ ۳) 7^5 ۴) ۱۲

۴- در یک اتوبوس ۱۰ نفر مسافر وجود دارد و این اتوبوس در ۶ ایستگاه توقف می‌کند. این مسافرها به چند طریق می‌توانند در ایستگاه‌ها پیاده شوند؟

۱) ۶۰ ۲) 6^{10} ۳) ۱۶ ۴) 10^6

۵- یک دوره بازی فوتبال بین ۱۰ تیم فوتبال به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همهٔ تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان دوره چند بازی انجام شده است؟ تمرین کتاب درسی

۱) ۹۰ ۲) 10^9 ۳) 9^{10} ۴) ۱۸۰

۶- به چند طریق می‌توان به یک آزمون ۴ گزینه‌ای با ۱۰ تست پاسخ داد به طوری‌که حتماً به تمام تست‌ها پاسخ داده شود؟

۱) ۴۰ ۲) 2^{10} ۳) 10^4 ۴) 2^{20}

۷- لیلا ۵ بلوز، ۳ دامن و ۴ شلوار دارد. او می‌خواهد بلوز با دامن یا بلوز با شلوار بپوشد. او به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد؟

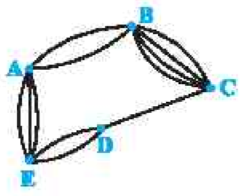
۱) ۳۵ ۲) ۶۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۴۵

۸- علی می‌خواهد به مسافرت برود. او برای رفت می‌خواهد با یکی از ۳ نوع قطار یا ۲ نوع هواپیما و برای برگشت با یکی از ۴ نوع اتوبوس یا ۲ نوع سواری مسافرت کند. او به چند طریق می‌تواند به سفر برود؟

۱) ۱۴ ۲) ۳۰ ۳) ۴۸ ۴) ۱۵

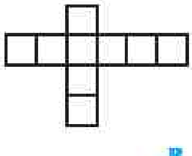
۹- از بین ۳ فیلم کارتونی، ۵ فیلم خانوادگی و ۴ فیلم طنز به چند طریق می‌توان دو فیلم با ژانرهای مختلف انتخاب کرد؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۷ ۳) ۱۲ ۴) ۳۶



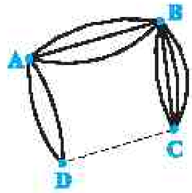
۱۰- با توجه به شکل مقابل، به چند طریق می‌توان از شهر A به شهر D رفت؟

۱) ۱۴ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۳۰



۱۱- با رنگ‌های زرد، سبز و آبی می‌خواهیم خانه‌های شکل مقابل را رنگ‌آمیزی کنیم. به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد به طوری‌که خانه‌های مجاور، رنگ‌های متفاوت داشته باشند؟

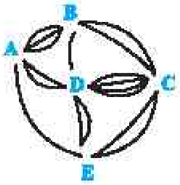
۱) ۲۵۶ ۲) ۷۶۸ ۳) ۵۱۲ ۴) ۳۸۴



۱۲- بین چهار شهر A، B، C و D راه‌هایی به صورت مقابل وجود دارد. بین دو شهر C و D چند راه وجود داشته باشد تا به ۲۲ طریق بتوان از شهر A به شهر C سفر کرد؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۳- بین پنج شهر A، B، C، D و E مطابق شکل مقابل، راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند. به چند طریق می‌توان از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر C سفر کرد؟ مشابه تمرین کتاب درسی



۱) ۲۴　　۲) ۱۴

۳) ۱۸　　۴) ۲۶

۱۴- در تست قبل، اگر بخواهیم از شهر A به شهر E برویم و حتماً از شهر C هم عبور کنیم، تعداد حالت‌های ممکن کدام است؟ (از یک شهر، نباید ۲ بار عبور کنیم.)

۱) ۸۴　　۲) ۷۶　　۳) ۱۰۸　　۴) ۱۰۰

۱۵- یک اتاق مربع شکل داریم و می‌خواهیم دیوارهای آن را با ۵ رنگ مختلف رنگ‌آمیزی کنیم. اگر بخواهیم هیچ کدام از دیوارهای مجاور، یک رنگ نداشته باشند، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۲۶۰　　۲) ۱۲۰　　۳) ۸۰　　۴) ۱۸۰

درسنامه

جایگشت

فاکتوریل

یکی از نمادهایی که در ریاضی وجود دارد، نماد **فاکتوریل** است که برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش از این نماد استفاده می‌کنیم. به طور مثال داریم: $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1$

به طور کلی $n!$ برابر است با: $\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\times\cdots\times 2\times 1}$

قرارداد: برای اعداد صفر و یک، فاکتوریل به صورت مقابل تعریف می‌شود: $1! = 1$ و $0! = 1$

نکته

۱) $\begin{cases} 1! = 1 \\ 2! = 2 \end{cases}$

۲) $n! = n(n-1)! = n(n-1)(n-2)! = \cdots$

مثال ۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\dfrac{6!}{4!}$　　ب) $\dfrac{5!\times 3!\times 0!}{4!\times 7!}$　　ج) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$

پاسخ روش اول:

الف) $\dfrac{6!}{4!} = \dfrac{6\times 5\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times \cancel{1}}{\cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}\times \cancel{1}} = 6\times 5 = 30$

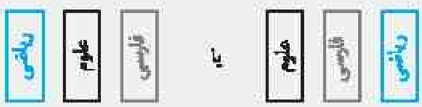
روش دوم: با استفاده از نکته‌ای که در بالا بیان کردیم، می‌توانستیم این طوری ساده کنیم:

$$\frac{6!}{4!} = \frac{6\times 5\times \cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 30$$

ب) $\dfrac{5!\times 3!\times 0!}{4!\times 7!} = \dfrac{\cancel{5!}\times \cancel{3!}\times 1}{4\times \cancel{3!}\times 7\times 6\times \cancel{5!}} = \dfrac{1}{4\times 7\times 6} = \dfrac{1}{168}$

ج) $\dfrac{n!}{(n-2)!} = \dfrac{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{\cancel{(n-2)!}} = n(n-1) = n^2 - n$

فرض کنید می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی، علوم و فارسی را کنار هم در یک طبقه بچینیم. چیدمان این کتاب‌ها را می‌توانیم به حالت‌های زیادی انجام دهیم. مثلاً این‌طوری:



اما تعداد این حالت‌ها چندتا است؟ برای محاسبهٔ آن از جایگشت استفاده می‌کنیم.

جایگشت

هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم. تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر $n!$ است. زیرا اگر برای هر کدام از این n شیء، یک مکان در نظر بگیریم، آن‌گاه برای مکان اول (از چپ یا راست)، n شیء یا انتخاب داریم، برای مکان دوم، $(n-1)$ شیء یا انتخاب، برای مکان سوم، $(n-2)$ شیء یا انتخاب و به همین ترتیب تا مکان آخر که برای آن یک انتخاب باقی می‌ماند. حال بنا به اصل ضرب، تعداد کل انتخاب‌ها برابر است با:

$$\underline{n}\ \underline{n-1}\ \underline{n-2}\ \cdots\ \underline{2}\ \underline{1} \Rightarrow n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1 = n!$$

پس برای چیدمان ۳ کتاب ریاضی، علوم و فارسی، تعداد $3! = 3\times 2\times 1 = 6$ حالت مختلف وجود دارد.

مثال با ارقام ۳، ۴، ۷، ۹ چند عدد چهاررقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۴! = ۲۴$: تعداد حالت‌ها

نکته اگر برای چیدمان اشیاء، افراد یا ارقام یا ... شرط خاصی قرار داده شود، مثلاً دو شیء خاص، اول باشند یا دو نفر کنار هم بشینند یا عددی که با ارقام می‌نویسیم، زوج باشد یا ...، باید ابتدا مکان مربوط به آن شرط را پر کنیم و بعد سایر مکان‌ها را پر نماییم.

مثال با ارقام ۰، ۳، ۵، ۶، ۹ می‌توان چند عدد ۵ رقمی: (بدون تکرار ارقام)

الف) فرد نوشت؟ **ب) با رقم دهگان مضرب ۳ نوشت؟** **ج) زوج نوشت؟**

پاسخ الف) چون می‌خواهیم عدد پنج‌رقمی فرد بنویسیم، پس باید رقم یکان عدد، فرد باشد. بنابراین اول مکان رقم یکان را پر می‌کنیم که برای آن ۳ حالت داریم، چون سه عدد ۳، ۵ و ۹ می‌توانند در آن قرار بگیرند. بعد به سراغ پر کردن مکان‌های دیگر می‌رویم. برای مکان اول (از سمت چپ)، ۳ انتخاب داریم، چون یکی از اعداد برای رقم یکان انتخاب شده و ۴ عدد دیگر باقی مانده است ولی صفر هم نمی‌تواند رقم اول از سمت چپ باشد، پس ۳ انتخاب برای این‌جا داریم. برای مکان دوم، ۳ انتخاب داریم، چون ۲تا عدد انتخاب شده‌اند و ۳تا باقی مانده‌اند و به همین ترتیب تا آخر، تعداد حالت‌های هر مکان را پر می‌کنیم. پس داریم:

$$\underset{\text{غیر از یکان و صفر}}{\underline{۳}} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\text{رقم یکان } \{۹ \text{ یا } ۵ \text{ یا } ۳\}}{\underline{۳}} = ۵۴$$

ب) می‌خواهیم رقم دهگان عدد پنج‌رقمی ما مضرب ۳ باشد، پس ابتدا مکان رقم دهگان و سپس از چپ به راست، سایر مکان‌ها را پر می‌کنیم. باید در رقم دهگان آن یکی از اعداد ۳ یا ۶ یا ۹ قرار بگیرد. بنابراین داریم:

$$\underset{\text{غیر از دهگان و صفر}}{\underline{۳}} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underset{\text{رقم دهگان } \{۹ \text{ یا } ۶ \text{ یا } ۳\}}{\underline{۳}} \times \underline{۱} = ۵۴$$

ج) **روش اول:** اگر تعداد کل اعداد پنج‌رقمی که با این ارقام می‌توان نوشت را منهای تعداد کل اعداد پنج‌رقمی فرد، کم کنیم، آن‌گاه تعداد اعداد پنج‌رقمی زوج به دست می‌آید. پس داریم:

$$\underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{۴}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۹۶$$: تعداد کل اعداد پنج‌رقمی

$۴۲ = ۵۴ - ۹۶ =$ تعداد کل اعداد پنج‌رقمی فرد $-$ تعداد کل اعداد پنج‌رقمی $=$ تعداد کل اعداد پنج‌رقمی زوج

روش دوم: چون می‌خواهیم عدد زوج بنویسیم، پس باید رقم یکان آن یکی از ارقام ۰ یا ۶ باشد.

حال تعداد حالت‌های هر کدام را جداگانه محاسبه کرده و بعد طبق اصل جمع، جواب آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

حالت اول: یکان صفر باشد $\rightarrow \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\{۰\}}{\underline{۱}} = ۲۴$

حالت دوم: یکان ۶ باشد $\rightarrow \underset{\text{غیر از صفر و ۶}}{\underline{۳}} \times \underline{۳} \times \underline{۲} \times \underline{۱} \times \underset{\{۶\}}{\underline{۱}} = ۱۸$

$\Longrightarrow$ تعداد کل اعداد پنج‌رقمی زوج $= ۲۴ + ۱۸ = ۴۲$

ما نفهمیدیم چرا تو روش دوم، دو حالت در نظر گرفتین؟ خب یکان رو با ۲ حالت پر می‌کردین، بعد هم بقیهٔ مکان‌ها رو، چه اشکالی داره؟

پاسخ *خیلی هم اشکال داره. حالا ببین چرا. خب اگه ما برای یکان، ۲ حالت در نظر بگیریم، بعد که بخوایم مکان اول از سمت چپ رو پر کنیم، چند حالت باید براش قرار بدیم؟ ببین الان گیر کردیم، چون نمی‌دونیم چندتا؟ برای این‌که اگه صفر تو یکان انتخاب شده باشه، برای این مکان، ۴ حالت داریم ولی اگه صفر، انتخاب نشده باشه، برای این مکان، ۳ حالت داریم و ما هم نمی‌دونیم کدوم عدد انتخاب شده و بنابراین نمی‌تونیم این جایگاه اول رو پر کنیم. برای همین دو حالت رو جدا در نظر می‌گیریم تا تکلیف ما مشخص باشه. بعد چون می‌گیم این یا اون، در آخر، جواب‌ها رو با هم جمع می‌کنیم. فکر کنم دیگه خوب خوب علت رو متوجه شده باشی. همیشه وقتی بین ارقام، عدد صفر وجود داره و عدد زوج رو می‌خوایم، باید همین‌طوری ۲ حالته، مسئله رو حل کنیم.*

همیشه یادم بمونه

نماد فاکتوریل: برای ضرب یک عدد طبیعی و بزرگ‌تر از ۲ در تمام اعداد طبیعی کوچک‌تر از خودش به کار می‌رود.

$$n! = n(n-۱)(n-۲) \times \cdots \times ۲ \times ۱ = n(n-۱)! = n(n-۱)(n-۲)! = \cdots$$

قرارداد $۰! = ۱$ ، $۱! = ۱$

جایگشت: هر حالت از کنار هم قرار گرفتن n شیء متمایز را یک جایگشت n تایی از آن n شیء می‌نامیم.

تعداد کل جایگشت‌های n تایی از n شیء متمایز برابر $n!$ است.

* در جایگشت از همان اصل ضرب استفاده می‌شود.

۱۶- کدام گزینه درست است؟

۱) $\frac{15!}{5!}=3!$　۲) $(0!+2!)!=6!$　۳) $10!-8!=89$　۴) $2\times(2!)!=(2!)^2$

۱۷- معادلهٔ $(x^2-x)!=1$ چند جواب دارد؟

۱) صفر　۲) ۴　۳) ۲　۴) ۳

۱۸- عدد $5\times7\times2^7\times3^4$ برابر فاکتوریل چه عددی است؟

۱) ۸　۲) ۷　۳) ۹　۴) ۱۰

۱۹- اگر $(n+1)!=2(n-1)!$، آن‌گاه مقدار $(3n)!$ کدام است؟

۱) ۷۲۰　۲) ۱　۳) ۶　۴) ۳

۲۰- به ازای چند مقدار صحیح از x تساوی $(3x^2-1)!=3x^2-1$ برقرار است؟

۱) ۴　۲) ۱　۳) ۲　۴) ۳

۲۱- از تساوی $(2n)!=6!\times7!$ مقدار n کدام است؟

۱) ۸　۲) ۵　۳) ۴　۴) ۱۰

۲۲- یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد حالت‌هایی که در آن‌ها عدد تاس، زوج باشد، کدام است؟

۱) ۱۲　۲) ۳　۳) ۶　۴) ۹

۲۳- با استفاده از ارقام ۲، ۵ و ۶ چند عدد سه‌رقمی می‌توان ساخت که با رقم ۵ شروع شوند؟

۱) ۹　۲) ۶　۳) ۲۷　۴) ۱۸

۲۴- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه‌رقمی فرد با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸　۲) ۳۶　۳) ۷۵　۴) ۶۰

۲۵- با ارقام ۱، ۲، ۶، ۸، ۹ چند عدد پنج‌رقمی با ارقام متمایز، می‌توان نوشت که رقم وسط آن همواره فرد باشد؟

۱) ۱۲　۲) ۲۴　۳) ۳۶　۴) ۴۸

۲۶- چند عدد چهاررقمی با ارقام فرد و متمایز، بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ وجود دارد؟ تجربی داخل ۹۰

۱) ۷۲　۲) ۸۴　۳) ۹۶　۴) ۱۰۸

۲۷- با حروف کلمهٔ «پتانسیل» چند کلمهٔ ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان ساخت به طوری‌که حرف وسط آن نقطه‌دار باشد؟

۱) ۱۴۴۰　۲) ۷۲۰　۳) ۱۴۲۰　۴) ۹۲۰

۲۸- با حروف کلمهٔ «**Sunday**» چند جایگشت ۴ حرفی با حروف متمایز می‌توان ساخت که در آن فقط یک حرف صدادار وجود داشته باشد؟

۱) ۴۸　۲) ۹۶　۳) ۱۹۲　۴) ۲۴

۲۹- با ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۸ چند عدد سه‌رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۳۰　۲) ۳۶　۳) ۲۴　۴) ۴۸

۳۰- با ارقام ۱، ۳، ۵، ۸ چند عدد سه‌رقمی مضرب ۳ با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

۱) ۱۲　۲) ۳۶　۳) ۶　۴) ۲۴

۳۱- با حروف کلمهٔ «تجربی» به چند طریق می‌توان کلمات ۳ حرفی بدون تکرار حروف ساخت که با حرف نقطه‌دار شروع شده و به حرف بی‌نقطه ختم شود؟

۱) ۲۱　۲) ۲۷　۳) ۱۸　۴) ۲۴

۳۲- چند عدد پنج‌رقمی با ارقام زوج و بزرگ‌تر از ۴۰۰۰۰ وجود دارد؟

۱) ۱۸۷۵　۲) ۱۲۵۰　۳) ۱۸۷۴　۴) ۱۲۴۹

۳۳- با حروف کلمهٔ «اردیبهشت» چند جایگشت ۵ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت؟

۱) $8!$　۲) $\frac{8!}{5!}$　۳) $5!$　۴) $\frac{8!}{3!}$

۳۴- با حروف کلمهٔ «کامپیوتر» چند کلمهٔ ۵ حرفی (بدون تکرار حروف) می‌توان نوشت به طوری‌که فقط حرف اول و آخر آن نقطه‌دار باشد؟

۱) ۱۲۰　۲) ۳۶۰　۳) ۲۴۰　۴) ۱۸۰

۳۵- چند عدد سه‌رقمی با ارقام متمایز بدون ارقام ۲ و ۵ و شامل رقم ۴ داریم؟

۱) ۱۱۴　۲) ۱۰۸　۳) ۱۲۶　۴) ۱۲۰

درسنامه

حالت‌های خاص جایگشت n شیء - جایگشت با تکرار

حالت‌های خاص جایگشت n شیء

(۱) گاهی می‌خواهیم n شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری‌که چند شیء خاص مثلاً k شیء، کنار هم باشند. برای پیدا کردن جایگشت این اشیاء، ابتدا آن k شیء خاص را به اصطلاح به هم می‌بندیم و یک شیء در نظر می‌گیریم. بعد اگر اشیاء داخل بسته با هم جایگشت داشته باشند، جایگشت آن‌ها را در جایگشت اشیاء باقی‌مانده و این بسته ضرب می‌کنیم. یعنی $(n-k+1)! \times k!$. اگر هم اشیاء داخل بسته با هم جایگشت نداشتند که جواب برابر $(n-k+1)!$ می‌شود.

مثال ۱) تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ BARAN که در آن دو حرف A کنار هم باشند، چه‌قدر است؟

پاسخ: چون می‌خواهیم دو حرف A کنار هم باشند، پس آن‌ها را یک شیء در نظر می‌گیریم. حالا باید جایگشت حروف B، R، N و (AA) که ۴ تا هستند را حساب کنیم. از طرفی جابه‌جایی دو حرف A با هم، تأثیری ندارد، پس درون بسته جایگشت نداریم. بنابراین تعداد جایگشت‌ها برابر است با: !۴

(۲) گاهی می‌خواهیم n شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری‌که دو شیء خاص کنار هم نباشند. در این حالت جایگشت کل اشیاء را پیدا می‌کنیم و بعد تعداد جایگشت‌هایی که در آن دو شیء خاص کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم.

مثال ۲) تعداد جایگشت‌های ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را پیدا کنید به طوری‌که رقم‌های ۳ و ۴ کنار هم نباشند.

پاسخ: جایگشت این‌که ارقام ۳ و ۴ کنار هم باشند را از جایگشت ۶ رقم داده شده کم می‌کنیم: ۱، ۲، (۳، ۴)، ۵، ۶

ارقام ۳ و ۴ کنار هم باشند

۶! − (۵! × ۲!) = ۷۲۰ − ۲۴۰ = ۴۸۰

جایگشت ۶ رقم — جایگشت ۳ و ۴ درون بسته

(۳) گاهی می‌خواهیم n شیء را در کنار هم جایگشت دهیم، به طوری‌که k شیء خاص $(k > 2)$ کنار هم نباشند. در این حالت ابتدا $(n-k)$ شیء بقیه را جایگشت داده و سپس در بین و دو طرف آن‌ها k شیء را جایگشت می‌دهیم.

مثال ۳) به چند طریق می‌توان ۵ کتاب داستان متمایز و ۵ کتاب علمی متمایز را در یک قفسه کنار هم بچینیم، به طوری‌که هیچ دو کتاب علمی‌ای در کنار هم نباشند؟

پاسخ: ابتدا ۵ کتاب داستان را می‌چینیم و بعد از ۶ تا فضاهای خالی در بین و دو طرف آن‌ها، ۵ مکان را انتخاب کرده و ۵ کتاب علمی را در آن‌جاها قرار می‌دهیم. در نتیجه داریم:

جایگشت کتاب‌های داستان — جایگشت کتاب‌های علمی

$$5! \times \binom{6}{5} \times 5! = 120 \times 6 \times 120 = 86400$$

انتخاب ۵ تا از ۶ تا مکان

__ داستان ۱ __ داستان ۲ __ داستان ۳ __ داستان ۴ __ داستان ۵ __

توجه: مفهوم $\binom{6}{5}$ و چگونگی محاسبهٔ آن را در درسنامهٔ بعد می‌خوانید. پس این مثال را بعد از مطالعهٔ درسنامهٔ بعدی، بخوانید.

(۴) گاهی می‌خواهیم دو گروه از اشیاء را به طور یک در میان، کنار هم جایگشت دهیم که دو حالت ممکن است رخ دهد:

۱) تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشد: در این حالت یک‌بار فرض می‌کنیم ابتدای صف چیدمان، گروه اول باشد و یک‌بار هم فرض می‌کنیم ابتدای صف، گروه دوم باشد و بعد جایگشت این دو حالت را با هم جمع می‌کنیم.

۲) یکی از گروه‌ها یک عضو بیشتر از گروه دیگر داشته باشد: در این حالت چیدمان صف را با گروهی شروع می‌کنیم که عضو بیشتری دارد.

مثال ۴) ۲ پسر و ۳ دختر به چند طریق می‌توانند به صورت یک در میان در یک صف، کنار هم بایستند؟ ۳ پسر و ۳ دختر چه‌طور؟

پاسخ: برای قرار دادن ۲ پسر و ۳ دختر در یک صف، چون تعداد دخترها بیشتر است، ابتدای صف را با دختر شروع می‌کنیم. پس داریم:

دختر۱ پسر۱ دختر۲ پسر۲ دختر۳ ⇐ ۳! × ۲! = ۶ × ۲ = ۱۲

اما برای قرار دادن ۳ پسر و ۳ دختر در یک صف، چون تعداد آن‌ها برابر است، یک‌بار، صف را با پسر و یک‌بار، صف را با دختر شروع می‌کنیم:

پسر۱ دختر۱ پسر۲ دختر۲ پسر۳ دختر۳ ⇐ ۳! × ۳!

یا ⇐ تعداد کل حالت‌ها = ۲ × ۳! × ۳! = ۲ × ۶ × ۶ = ۷۲

دختر۱ پسر۱ دختر۲ پسر۲ دختر۳ پسر۳ ⇐ ۳! × ۳!

جایگشت با تکرار

گاهی n شیء داریم که n_1 تای آن شبیه هم، n_2 تای آن شبیه هم و ... و n_k تای آن شبیه هم است و می‌خواهیم جایگشت این n شیء را به دست آوریم. در این صورت باید به $n!$، این n شیء را جایگشت دهیم و سپس به حاصل‌ضرب جایگشت اشیاء تکراری یعنی $n_1!$، $n_2!$، ... و $n_k!$ تقسیم کنیم. پس تعداد کل حالت‌ها در این‌جا برابر می‌شود با:

$$\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال ۱ **جایگشت‌های ۵ حرفی را برای حروف کلمهٔ «باران» به دست آورید.**

پاسخ: در بین ۵ حرف این کلمه، ۲ حرف «ا» وجود دارد. پس تعداد جایگشت‌های این ۵ حرف برابر است با:

$$\frac{5!}{2!}=\frac{5\times4\times3\times\cancel{2!}}{\cancel{2!}}=60$$

مثال ۲ **با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲، ۳ چند جایگشت ۶ رقمی می‌توان نوشت؟**

پاسخ: چون دو رقم ۱ و سه رقم ۲ داریم، در نتیجه:

$$\frac{6!}{2!\times3!}=\frac{6\times5\times\overset{2}{\cancel{4}}\times\cancel{3!}}{\cancel{2}\times\cancel{3!}}=60$$

همیشه یادم بمونه

حالت‌های خاص جایگشت

- قرار گرفتن چند شیء خاص کنار هم $\xrightarrow{\text{راهکار}}$ بسته‌بندی چند شیء خاص
- کنار هم نبودن دو شیء خاص $\xrightarrow{\text{راهکار}}$ جایگشت کنار هم بودن دو شیء خاص − جایگشت کل
- کنار هم نبودن k شیء خاص که $k>2$ $\xrightarrow{\text{راهکار}}$ ابتدا $n-k$ شیء را جایگشت داده و سپس k شیء را بین و دو طرف آن‌ها جایگشت می‌دهیم.
- جایگشت یک در میان دو گروه از اشیاء
  - تعداد اعضای دو گروه با هم برابر باشد. $\xrightarrow{\text{راهکار}}$ جایگشت چیدمان صف با گروه اول در ابتدای صف + جایگشت چیدمان صف با گروه دوم در ابتدای صف
  - یک گروه یک عضو بیشتر از گروه دیگر داشته باشد. $\xrightarrow{\text{راهکار}}$ جایگشت چیدمان صف با شروع از گروهی که عضو بیشتری دارد.

جایگشت با تکرار برای n شیء که n_1 تا شبیه هم، n_2 تا شبیه هم، ... و n_k تا شبیه هم است، برابر می‌شود با: $\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times\cdots\times n_k!}$

۳۶- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت که به طوری عددهای اول کنار هم باشند؟

۱) ۶ ۲) ۲۴ ۳) ۱۲ ۴) ۱۸

۳۷- سه پسر و پنج دختر به چند طریق می‌توانند کنار هم روی یک ردیف صندلی بنشینند به طوری‌که پسرها کنار هم باشند؟

۱) $5!\times3!$ ۲) $4!\times5!$ ۳) $3!\times4!$ ۴) $6!\times3!$

۳۸- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «دبستان» که در آن دو حرف «س» و «ت» همواره کنار هم باشند، کدام است؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

۳۹- با حروف کلمهٔ «دامداران» چند جایگشت ۸ حرفی می‌توان ساخت که در آن حروف یکسان، کنار هم باشند؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۶۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۳۶۰

۴۰- با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۳، ۳ چند عدد شش‌رقمی می‌توان ساخت به طوری‌که در همهٔ آن‌ها عدد ۳۲۱ دیده شود؟

۱) ۴۸ ۲) ۱۲ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۴۱- ۵ نفر A، B، C، D و E به چند طریق می‌توانند کنار هم بنشینند به طوری‌که نفر A کنار B و C بنشیند؟

۱) ۳۶ ۲) ۶۰ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۴۲- می‌خواهیم با حروف a، b، c و d کلمات چهار حرفی بسازیم. تعداد کلماتی که در آن‌ها حرف‌های a و c کنار هم و b و d هم کنار هم هستند، کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۶

۴۳- در تست قبل، اگر بخواهیم حروف a و c کنار هم نباشند، تعداد کلمات ۴ حرفی ممکن کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۶ ۴) ۸

۴۴- با حروف کلمهٔ «راستگو» چند کلمهٔ شش‌حرفی می‌توان نوشت به طوری‌که دو حرف «س» و «گ» کنار هم نباشند؟

۱) ۲۴۰ ۲) ۷۲۰ ۳) ۴۸۰ ۴) ۳۶۰

۴۵- ۵ کتاب داستان، ۳ کتاب هنری و ۴ کتاب علمی را می‌خواهیم در طبقهٔ یک کتاب‌خانه کنار هم قرار دهیم. اگر بخواهیم کتاب‌های هم موضوع کنار هم باشند، این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) $5\times(4!)^3$ ۲) $(4!\times3!)^2$ ۳) $(3!\times4!)^2\times5$ ۴) $(3!)^3\times5$

۴۶- پنج نفر به نام‌های **a**، **b**، **c**، **d** و **e** قرار است در یک همایش سخنرانی کنند. ترتیب سخنرانی این افراد به چند طریق ممکن است اگر بین **a** و **b** فقط یک نفر سخنرانی کند؟ ریاضی داخل ۸۷

۱) ۲۴ ۲) ۳۶ ۳) ۵۴ ۴) ۶۰

۴۷- چند عدد سه‌رقمی وجود دارد که حداقل یک رقم آن ۲ باشد؟

۱) ۳۰۰ ۲) ۲۵۲ ۳) ۳۳۳ ۴) ۲۰۰

۴۸- می‌خواهیم ۳ کتاب ریاضی و ۲ کتاب تاریخ را به صورت یک در میان کنار هم بچینیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟

۱) ۱۲ ۲) ۶ ۳) ۲۴ ۴) ۱۰

۴۹- ۱۰ دختر و ۹ پسر به چند طریق می‌توانند به طور یک در میان در یک ردیف از سالن سینما بنشینند؟

۱) $10\times9!$ ۲) $9\times(10!)^2$ ۳) $9\times10!$ ۴) $10\times(9!)^2$

۵۰- با جابه‌جایی ارقام عدد ۵۷۶۲۲۲ چند عدد شش‌رقمی می‌توان تشکیل داد به طوری‌که رقم‌های ۲ یک در میان قرار گیرند؟ ریاضی خارج ۸۹

۱) ۹ ۲) ۱۲ ۳) ۱۸ ۴) ۲۴

۵۱- ۵ زن و ۵ مرد را به چند طریق می‌توان به صورت یک در میان کنار هم قرار داد؟

۱) $(5!)^2$ ۲) $2\times5!$ ۳) $2\times(5!)^2$ ۴) $(5!)^4$

۵۲- با حروف کلمهٔ «آبادان» چند جایگشت ۶ حرفی می‌توان ساخت؟

۱) ۷۲۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۳۶۰ ۴) ۲۴۰

۵۳- با حروف کلمهٔ «**notebook**» چند کلمهٔ هشت‌حرفی می‌توان نوشت؟

۱) ۴۰۳۲۰ ۲) ۶۲۷۰ ۳) ۴۰۲۳۰ ۴) ۶۷۲۰

۵۴- با ارقام ۶، ۵، ۶، ۲، ۴، ۶، ۵، ۱ چند عدد ۸ رقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۳۳۶۰ ۲) ۱۱۲۰ ۳) ۱۶۸۰ ۴) ۲۲۴۰

۵۵- شش رقم ۵، ۵، ۵، ۳، ۳، ۱ را از مقوا بریده و در کنار یک‌دیگر جابه‌جا می‌کنیم. تعداد اعداد شش‌رقمی متمایز، کدام است؟ انسانی خارج ۹۵

۱) ۶۰ ۲) ۷۲ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۵۶- با حروف کلمهٔ «**DAMDARAN**» چند رمز عبور ۸ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که با **D** شروع و به **D** ختم شوند؟ انسانی خارج ۹۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۶۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۲۴۰

۵۷- با حروف کلمهٔ «راهپیمایی» چند کلمهٔ ۹ حرفی می‌توان ساخت که با کلمهٔ «راه» شروع شوند؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۹۰ ۳) ۶۰ ۴) ۱۵۰

۵۸- در تست قبل، اگر بخواهیم کلمات ۹ حرفی بسازیم که به حرف «م» ختم شوند، آن‌گاه تعداد حالت‌های ممکن کدام است؟

۱) ۳۳۶۰ ۲) $8!$ ۳) ۱۶۸۰ ۴) $\frac{8!}{3!}$

۵۹- با حروف کلمهٔ «**livingroom**» چند کلمهٔ ۱۰ حرفی می‌توان ساخت که با حرف «**m**» شروع و به حرف «**g**» ختم شوند؟

۱) $\frac{10!}{4}$ ۲) $8!$ ۳) $10!$ ۴) $\frac{8!}{4}$

۶۰- حروف کلمهٔ «**EARNEST**» را به چند طریق می‌توان در کنار هم قرار داد به طوری‌که حرف **N** همواره در وسط قرار گیرد؟ (بدون توجه به مفهوم) انسانی داخل ۹۱

۱) ۱۸۰ ۲) ۲۱۶ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۶۰

۶۱- می‌خواهیم ۲ مداد سیاه و ۳ مداد قرمز را طوری کنار هم بچینیم که مدادهای سیاه همواره کنار هم باشند. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟ (مدادها متمایز نیستند.)

۱) ۲۴ ۲) ۴ ۳) ۱۰ ۴) ۴۸

۶۲- با حروف کلمهٔ «**advance**» چند کلمهٔ ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حروف بی‌صدا یکی در میان باشند؟

۱) ۱۴۴ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۹۶

۶۳- چند عدد شش‌رقمی با ارقام ۲، ۰، ۰، ۰، ۳، ۰ می‌توان نوشت؟

۱) ۳۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۶۴- با حروف کلمهٔ «FARHAD» چند رمز عبور ۶ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که دو حرف A کنار هم نباشند؟ انسانی داخل ۹۶

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۶۵- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «BARAN» به طوری‌که Aها کنار هم نباشند، کدام است؟

۱) ۳۶ ۲) ۲۴ ۳) ۶۰ ۴) ۹۶

۶۶- تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ «banana» با تعداد جایگشت‌های کدام ارقام برابر است؟

۱) ۱۲۲۲۱ ۲) ۳۴۳۴ ۳) ۵۲۲۵۲۱ ۴) ۴۲۳۲۳۴

۶۷- با حروف کلمهٔ «student» چند جایگشت ۷ حرفی می‌توان ساخت به طوری‌که حرف صدادار وسط کلمه باشد؟

۱) $\frac{۷!}{۲}$ ۲) $۶!\times ۲$ ۳) $۷!$ ۴) $۶!$

۶۸- چند عدد پنج‌رقمی زوج با ارقام ۲، ۲، ۳، ۳، ۴ می‌توان نوشت؟

۱) ۱۸ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۶۹- چند عدد چهاررقمی با ارقام ۵، ۵، ۵، ۲، ۲ می‌توان نوشت؟

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۱۲ ۴) ۱۵

۷۰- با ارقام ۱، ۱، ۲، ۲، ۲ چند عدد چهاررقمی زوج می‌توان نوشت؟

۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۷۱- با ارقام ۱، ۱، ۴، ۷، ۷، ۷ چند عدد چهاررقمی می‌توان نوشت؟

۱) ۳۶ ۲) ۳۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۰

درسنامه

تبدیل یا جایگشت r شیء از n شیء ـ ترکیب r شیء از n شیء

همان‌طور که قبلاً هم دیدید در بعضی از چیدمان‌ها (اشیاء یا ارقام یا ...) ترتیب قرار گرفتن اشیاء، ارقام یا افراد یا ... اهمیت دارد. مثلاً برای نوشتن یک عدد دورقمی با ارقام ۳ و ۷، این‌که ۳ اول باشد یا ۷ اهمیت دارد و اعداد متفاوتی را به ما می‌دهند، ۳۷ و ۷۳. حال مثلاً می‌خواهیم با ارقام ۱، ۲، ۵، ۶ و ۷ یک عدد سه رقمی با ارقام متمایز بنویسیم. در این صورت داریم:

$$\underline{۵}\times\underline{۴}\times\underline{۳}=۶۰$$: تعداد حالت‌ها

در این‌جا حاصل‌ضرب ۳ × ۴ × ۵ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$۵\times۴\times۳=\frac{۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=\frac{۵!}{۲!}=\frac{\overset{\text{۵ رقم}}{۵!}}{\underset{\text{انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم}}{(۵-۳)!}}$$

در واقع برای محاسبهٔ این تعداد از حالت‌ها از قاعدهٔ زیر استفاده کرده‌ایم:

تبدیل r شیء از n شیء یا جایگشت r شیء از n شیء

تعداد انتخاب‌های r شیء از بین n شیء که $r\le n$ و جابه‌جایی یا ترتیب انتخاب r شیء در آن اهمیت داشته باشد، برابر $\frac{n!}{(n-r)!}$ است که برای آن از نماد $P(n,r)$ استفاده می‌کنیم. در واقع داریم:

$$\boxed{P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}\ ,\ r\le n}$$

توجه برای حل این مسائل می‌توان از اصل ضرب یا فرمول P استفاده کرد، هر دو جواب یکسانی را به دست می‌دهند.

تست ۸ **می‌خواهیم از بین ۶ نفر متقاضی استخدام، سه نفر را برای پست‌های منشی، حسابدار و معاونت انتخاب کنیم. این کار به چند طریق امکان‌پذیر است؟**

پاسخ چون جابه‌جایی در انتخاب افراد مهم است، این‌که نفر اول منشی باشد یا نفر دوم یا نفر سوم، پس باید از فرمول تبدیل یا P استفاده کنیم:

$$P(۶,۳)=\frac{۶!}{(۶-۳)!}=\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵\times۴\times\cancel{۳!}}{\cancel{۳!}}=۱۲۰$$

می‌توانستیم برای پیدا کردن جواب، از اصل ضرب نیز استفاده کنیم:

$$\underline{۶}\times\underline{۵}\times\underline{۴}=۱۲۰$$

پاسخ تشریحی

۱ ۴ طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های انتخاب برای رضا برابر است با:

$$10\times 5\times 6=300$$

۲ ۱ برای هر نفر ۱۲ انتخاب برای سوار شدن وجود دارد. در نتیجه داریم:

$$12\times 12\times 12=12^3=(3\times 4)^3=3^3\times 4^3=3^3\times (2^2)^3=3^3\times 2^6$$

۳ ۳ برای هر هدیه ۷ تا انتخاب داریم. در نتیجه تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$7\times 7\times 7\times 7\times 7=7^5$$

۴ ۲ هر مسافر در هر کدام از ۶ ایستگاه می‌تواند پیاده شود. پس داریم:

$$\underbrace{6\times 6\times \cdots \times 6}_{\text{۱۰ تا}}=6^{10}$$

۵ ۱ اگر تیم‌ها را به عنوان میزبان و مهمان درنظر بگیریم، برای تیم میزبان ۱۰ انتخاب و برای تیم مهمان ۹ انتخاب داریم. در نتیجه تعداد بازی‌ها برابر است با:

$$10\times 9=90$$

۶ ۴ چون حتماً باید به همهٔ تست‌ها پاسخ داده شود، برای پاسخ به هر سؤال، ۴ انتخاب داریم. در نتیجه:

$$\underbrace{4\times 4\times \cdots \times 4}_{\text{۱۰ تا}}=4^{10}=(2^2)^{10}=2^{20}$$

حل کنید اگه شرط این‌که حتماً به تمام سؤالات پاسخ داده شود رو نداده بود، جواب چه فرقی می‌کرد؟

پاسخ *اگه این شرط رو نداده بود، اون وقت می‌تونستیم به تست‌ها پاسخ هم ندیم. بنابراین برای هر تست ۵ تا انتخاب داشتیم و جواب می‌شد:*

$$\underbrace{5\times 5\times \cdots \times 5}_{\text{۱۰ تا}}=5^{10}$$

۷ ۱

$$\underbrace{5\times 3}_{\text{بلور با دامن}}\underbrace{+}_{\text{یا}}\underbrace{5\times 4}_{\text{بلور با شلوار}}=15+20=35$$

۸ ۲

$$\underbrace{3+2}_{\text{رفت}}\times \underbrace{4+2}_{\text{برگشت}}=5\times 6=30$$

۹ ۲

$$\underbrace{3}_{\text{کارتونی}}\underbrace{\times}_{\text{و}}\underbrace{5}_{\text{خانوادگی}}\overbrace{+}^{\text{یا}}\underbrace{3}_{\text{کارتونی}}\underbrace{\times}_{\text{و}}\underbrace{4}_{\text{طنز}}\overbrace{+}^{\text{یا}}\underbrace{5}_{\text{خانوادگی}}\underbrace{\times}_{\text{و}}\underbrace{4}_{\text{طنز}}=15+12+20=47$$

۱۰ ۱ برای رفتن از A به D باید یا از A به B، بعد به C و بعد به D برویم یا از A به E و بعد به D برویم:

$$\begin{cases}A\to B\to C\to D: 2\times 4\times 1=8\\ A\to E\to D: 3\times 2=6\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها}=8+6=14$$

۱۱ ۲ از خانهٔ سمت چپ شروع به رنگ کردن می‌کنیم و تعداد حالت‌هایی که هر خانه را می‌توان رنگ‌آمیزی کرد در شکل می‌نویسیم:

		۲			
۳	۲	۲	۲	۲	۲
		۲			
		۲			

$$\text{تعداد حالت‌ها}=2^8\times 3=256\times 3=768$$

۱۲ ۴

$$\begin{cases}A\to B\to C: 3\times 4=12\\ A\to D\to C: 2\times x=2x\end{cases}\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها}=12+2x\xrightarrow{\text{طبق فرض}}22\Rightarrow 2x=10\Rightarrow x=5$$

۱۳ ۳ تعداد حالت‌های مختلف برای سفر از شهر D به شهر C و البته بدون عبور از شهر E را به دست می‌آوریم:

۱) $D\to A\to B\to C: 2\times 3\times 2=12$

۲) $D\to B\to C: 1\times 2=2$

۳) $D\to C: 4$

$$\Rightarrow \text{تعداد کل راه‌ها}=12+2+4=18$$

۱۴ ۳

$۱)\ A \to B \to C \to E: ۳\times۲\times۲=۱۲$

$۲)\ A \to B \to C \to D \to E: ۳\times۲\times۴\times۲=۴۸$

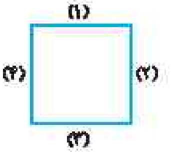
$۳)\ A \to B \to D \to C \to E: ۳\times۱\times۴\times۲=۲۴$

$۴)\ A \to D \to C \to E: ۲\times۴\times۲=۱۶$

$۵)\ A \to D \to B \to C \to E: ۲\times۱\times۲\times۲=۸$

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $=۱۲+۴۸+۲۴+۱۶+۸=۱۰۸$

۱۵ ۱



اگر دیوارهای اتاق را به صورت روبه‌رو شماره‌گذاری کنیم، آن‌گاه برای رنگ کردن دیوار (۱)، ۵ انتخاب داریم. چون می‌خواهیم دیوارهای مجاور، یک رنگ نداشته باشند، برای رنگ کردن دیوارهای (۲) و (۴) دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: دیوارهای (۲) و (۴) یک رنگ داشته باشند:

در این حالت برای رنگ کردن دیوار (۲)، ۴ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوار (۱)) داریم و چون رنگ دیوار (۴) هم مانند رنگ دیوار (۲) است، برای آن ۱ انتخاب خواهیم داشت. حال برای رنگ کردن دیوار (۳)، باز هم ۴ انتخاب داریم، چون فقط نباید رنگ دیوار (۲) و (۴) باشد. بنابراین تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\overset{\text{دیوار (۱)}}{۵}\times\underset{\text{دیوار (۲)}}{۴}\times\overset{\text{دیوار (۳)}}{۴}\times\underset{\text{دیوار (۴)}}{۱}=۸۰$$

حالت دوم: دیوارهای (۲) و (۴) دو رنگ مختلف داشته باشند:

در این حالت برای رنگ کردن دیوار (۲)، ۴ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوار (۱)) و برای رنگ کردن دیوار (۴)، ۳ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوارهای (۱) و (۲)) داریم. حال برای رنگ کردن دیوار (۳)، ۳ انتخاب (رنگی غیر از رنگ دیوارهای (۲) و (۴)) خواهیم داشت. در نتیجه تعداد حالت‌های ممکن برابر است با:

$$\overset{\text{دیوار (۱)}}{۵}\times\underset{\text{دیوار (۲)}}{۴}\times\overset{\text{دیوار (۳)}}{۳}\times\underset{\text{دیوار (۴)}}{۳}=۱۸۰$$

بنابراین تعداد کل حالت‌های ممکن برابر است با:

$$۸۰+۱۸۰=۲۶۰$$

۱۶ ۴

بررسی گزینه‌ها:

$$۱)\ \frac{۱۵!}{۵!}=\frac{۱۵\times۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}}=۱۵\times۱۴\times۱۳\times۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸\times۷\times۶\Rightarrow\frac{۱۵!}{۵!}\neq۳۱\quad\times$$

$$۲)\ (۰!+۳!)!=(۱+۶)!=۷!\neq۶!\quad\times$$

$$۳)\ ۱۰!-۸!=۱۰\times۹\times۸!-۸!=۸!(۹۰-۱)=۸!\times۸۹\neq۸۹\quad\times$$

$$۴)\ \begin{cases}(۲!)!=۲!=۲\Rightarrow۲\times(۲!)!=۲\times۲=۴\\(۲!)^۲=۲^۲=۴\end{cases}\Rightarrow۲\times(۲!)!=(۲!)^۲\quad\checkmark$$

۱۷ ۲

می‌دانیم تنها $۱=!۰$ و $۱=!۱$. در نتیجه داریم:

$$(x^۲-x)!=۱\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x=۰\Rightarrow x(x-۱)=۰\Rightarrow x=۰\ \text{یا}\ x=۱\\\text{یا}\\x^۲-x=۱\Rightarrow x^۲-x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱\pm\sqrt{۵}}{۲}\end{cases}$$

پس این معادله ۴ جواب دارد.

۱۸ ۳

در عدد داده شده، ابتدا اعداد توان‌دار را به صورت ضرب عامل‌ها می‌نویسیم. سپس سعی می‌کنیم اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ و ... را در بین عامل‌های ضرب پیدا کرده و یا آن‌ها را با ضرب دو یا سه یا تعداد عامل‌های بیشتر ایجاد کنیم:

$$۳^۴\times۲^۷\times۷\times۵=۳\times\underbrace{۳\times۳}_{۹}\times\underbrace{۳\times۲}_{۶}\times۲\times\underbrace{۲\times۲\times۲}_{۸}\times\underbrace{۲\times۲}_{۴}\times۷\times۵=۹\times۸\times۷\times۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۹!$$

همان‌طور که می‌بینید توانستیم اعداد ۱ تا ۹ را پیدا یا ایجاد کنیم و به $۹!$ برسیم.

۱۹ ۳

$$۲(n-۱)!=(n+۱)!\Rightarrow۲\cancel{(n-۱)!}=(n+۱)n\cancel{(n-۱)!}\Rightarrow۲=n^۲+n\Rightarrow n^۲+n-۲=۰\Rightarrow(n-۱)(n+۲)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}n-۱=۰\Rightarrow n=۱\ \checkmark\\n+۲=۰\Rightarrow n=-۲\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}\Rightarrow(۳n)!\xlongequal{n=۱}۳!=۶$$

۲۰ | **۳** از تساوی داده شده می‌توان نتیجه گرفت که فاکتوریل یک عبارت برابر خود همان عبارت شده است. هم‌چنین می‌دانیم تنها اعدادی که فاکتوریل آن‌ها برابر خودشان است، اعداد ۱ و ۲ هستند، زیرا $۱!=۱$ و $۲!=۲$ در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} ۳x^۲-۱=۱ \Rightarrow ۳x^۲=۲ \Rightarrow x^۲=\frac{۲}{۳} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{۲}{۳}} \notin \mathbb{Z} \\ \text{یا} \\ ۳x^۲-۱=۲ \Rightarrow ۳x^۲=۳ \Rightarrow x^۲=۱ \Rightarrow x=\pm۱ \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

پس تنها به ازای ۲ مقدار صحیح x، تساوی داده شده برقرار است.

۲۱ | **۲**

$$(۲n)!=۶!\times۷! \Rightarrow (۲n)!=۶\times۵\times۴\times۳\times۲\times۱\times۷! = ۳\times۲\times۵\times۲\times۲\times۳\times۲\times۱\times۷! = \underbrace{۲\times۵}_{۱۰}\times\underbrace{۳\times۳}_{۹}\times\underbrace{۲\times۲\times۲}_{۸}\times۷!$$

$$=۱۰\times۹\times۸\times۷!=۱۰! \Rightarrow (۲n)!=۱۰! \Rightarrow ۲n=۱۰ \Rightarrow n=۵$$

۲۲ | **۳** باید تاس یکی از عددهای ۲، ۴ یا ۶ بیاید. پس داریم:

$$\underset{\text{تعداد حالت‌های سکه}}{\underline{۲}} \times \underset{\text{تعداد حالت‌های تاس}}{\underline{۳}} = ۶$$

۲۳ | **۱**

$$\underset{\text{رقم ۵}}{\underline{۱}} \times \underline{۳} \times \underline{۳} = ۹$$

ما جواب رو به صورت ۲ = ۱ × ۲ × ۱ نوشتیم؟

پاسخ *تو حالتی که رقم‌ها تکراری نباشن رو نوشتی. اما خواسته باشه، وقتی تو صورت سؤال، نمیگه «بدون تکرار ارقام» یا «متمایز»، پس یعنی رقم‌ها می‌تونن تکراری باشن و تو باید حالت با تکرار رو به دست بیاری.*

۲۴ | **۲** در این‌جا ارقام متمایز هستند، پس داریم:

$$\underline{۴} \times \underset{\{۱،۳ \text{ یا } ۵\}}{\underline{۳}} \times \underline{۳} = ۳۶$$

۲۵ | **۴** اول تعداد حالت‌های رقم وسط را پر می‌کنیم و بعد به سراغ بقیهٔ رقم‌ها می‌رویم:

$$\underline{۴} \times \underline{۳} \times \overset{\text{رقم وسط}}{\underset{\{۱ \text{ یا } ۹\}}{\underline{۲}}} \times \underline{۲} \times \underline{۱} = ۴۸$$

۲۶ | **۳** باید عدد چهاررقمی را با ارقام فرد ۹، ۷، ۵، ۳، ۱ بسازیم، اما برای محاسبهٔ جایگشت، باید به شرط بزرگ‌تر از ۳۰۰۰ بودن عدد توجه کنیم. پس رقم اول از سمت چپ عدد، نمی‌تواند ۱ باشد و داریم:

$$\underset{\{۳،۵،۷ \text{ یا } ۹\}}{\underline{۴}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} = ۹۶$$

۲۷ | **۱** اول تعداد حالت‌های حرف وسط را پر می‌کنیم و بعد جایگاه‌های بعدی را:

$$\underline{۶} \times \underline{۵} \times \underset{\{\text{ب،ش،ن،ی}\}}{\underline{۴}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۱۴۴۰$$

۲۸ | **۳** حرف‌های a و u صدادار هستند که می‌توانند حرف اول یا دوم یا سوم یا چهارم باشند. تعداد حالت‌های جایگشت ۴ حرفی را در صورتی که حرف صدادار، حرف اول باشد، به دست می‌آوریم و بعد در ۴ ضرب می‌کنیم:

$$\underset{\{a \text{ یا } u\}}{\underline{۲}} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۲} = ۴۸ \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = ۴\times۴۸ = ۱۹۲$$

۲۹ | **۱** چون رقم صفر در بین ارقام وجود دارد، پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{یکان عدد، رقم صفر باشد: } \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underset{\text{صفر}}{\underline{۱}} = ۱۲ \\ \\ \text{یکان عدد، رقم ۸ یا ۴ باشد: } \underline{۳} \times \underline{۳} \times \underset{\{۴ \text{ یا } ۸\}}{\underline{۲}} = ۱۸ \end{array}\right. \Rightarrow \text{تعداد کل اعداد} = ۱۲+۱۸ = ۳۰$$

۳۰ | **۱** می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که مجموع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. پس باید از بین ۴ رقم داده شده، ۳ رقمی را انتخاب کنیم که مجموع آن‌ها بر ۳ بخش‌پذیر باشد. در نتیجه این ۳ رقم را باید از بین ارقام مجموعه‌های $\{۱،۳،۵\}$ و $\{۱،۳،۸\}$ انتخاب کنیم. بنابراین داریم:

$$\overset{\text{جایگشت } \{۱،۳،۵\}}{۳!} \underset{\text{یا}}{+} \overset{\text{جایگشت } \{۱،۳،۸\}}{۳!} = ۶+۶ = ۱۲$$

۳۱ | **۱** چون حرف «ی» در اول و وسط کلمه، نقطه‌دار و در آخر کلمه، بی‌نقطه است، پس دو حالت در نظر می‌گیریم. دقت کنید که تنها حرف بی‌نقطهٔ این کلمه «ر» است. پس داریم:

$$\left\{\begin{array}{l} \text{حرف اول «ی» باشد: } \underset{\text{ر}}{\underline{۱}} \times \underline{۳} \times \underset{\text{ی}}{\underline{۱}} = ۳ \\ \\ \text{حرف اول «ی» نباشد: } \underset{\{\text{ر،ی}\}}{\underline{۲}} \times \underline{۳} \times \underset{\{\text{ب،ج،ت}\}}{\underline{۳}} = ۱۸ \end{array}\right. \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات} = ۳+۱۸ = ۲۱$$

۳۲ ۳ باید ارقام عدد پنج رقمی را از بین ارقام مجموعهٔ $\{0,2,4,6,8\}$ انتخاب کنیم. از طرفی چون می‌خواهیم عدد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، باید رقم اول از سمت چپ ۲ نباشد. در نتیجه داریم:

$$\underset{(\text{۸یا۶یا۴})}{\underline{3}} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} \times \underline{5} = 1875$$

حالا در بین این اعداد، عدد ۴۰۰۰ هم وجود دارد و ما چون می‌خواهیم عدد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ باشد، پس یک عدد را از تعداد اعداد به دست آمده، کم می‌کنیم. در نتیجه تعداد کل اعداد مورد نظر ما $1875-1=1874$ تا می‌باشد.

۳۳ ۴ کلمهٔ «اردیبهشت» ۸ حرف دارد. در نتیجه داریم:

$$\underline{8} \times \underline{7} \times \underline{6} \times \underline{5} \times \underline{4} = \frac{8!}{3!}$$

سؤال جواب آخر رو چه‌طوری اون‌جوری نوشتین؟

پاسخ *خیلی راحت. ضرب حاصل‌ضربی که داریم، برای این که !۸ رو نشون بده $1\times2\times3$ که همون !۳ هست رو کم داره، یعنی انگار !۸ تقسیم بر !۳ شده، چون داریم:*

$$\frac{8!}{3!} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 8\times7\times6\times5\times4$$

با کمی دقت و تمرین بیشتر، تو هم خیلی راحت می‌تونی این جور جواب‌ها رو پیدا کنی.

۳۴ ۳ از بین ۸ حرف کلمه، ۵ حرف آن بی‌نقطه است که باید در اول و آخر کلمه نباشند. به دلیل وجود حرف «ی» دو حالت در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \text{حرف اول «ی» باشد:}\ \underset{\{\text{ب، ت}\}}{\underline{2}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underset{\text{ی}}{\underline{1}} = 120 \\ \text{حرف اول «ی» نباشد:}\ \underset{\text{یکی از دو حرف}\{\text{ب، ت}\}}{\underline{1}} \times \underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underset{\{\text{ب، ت}\}}{\underline{2}} = 120 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل کلمات} = 120+120 = 240$$

۳۵ ۱ چون می‌خواهیم عدد سه رقمی شامل رقم ۴ باشد، پس یکی از ارقام آن حتماً ۴ است. از طرفی می‌خواهیم ارقام ۲ و ۵ را نداشته باشد، پس باید دو رقم دیگر را از بین ارقام ۰، ۱، ۳، ۶، ۷، ۸، ۹ انتخاب کنیم. در نتیجه داریم:

$$\begin{cases} \text{۴ رقم اول باشد:}\ \underset{\text{رقم ۴}}{\underline{1}} \times \underline{7} \times \underline{6} = 42 \\ \text{۴ رقم وسط باشد:}\ \underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{6}} \times \underset{\text{رقم ۴}}{\underline{1}} \times \underline{6} = 36 \\ \text{۴ رقم آخر باشد:}\ \underset{\text{غیر از صفر}}{\underline{6}} \times \underline{6} \times \underset{\text{رقم ۴}}{\underline{1}} = 36 \end{cases} \Rightarrow \text{تعداد کل حالت‌ها} = 42+36+36 = 114$$

۳۶ ۳ دو عدد اول ۲ و ۳ را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. پس این بسته با دو رقم ۱ و ۴ به !۳ جایگشت دارند. درون بسته هم !۲ جایگشت دارند. در نتیجه داریم:
$3!\times2! = 6\times2 = 12$

۳۷ ۴ سه تا پسر را یک بسته در نظر می‌گیریم. پس باید جایگشت ۶ شیء متمایز (۵ دختر و یک بسته) را حساب کرده و در جایگشت ۳ تا پسر ضرب کنیم:
$6!\times3!$

۳۸ ۱ دو حرف «س» و «ت» را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. در نتیجه کلاً ۵ حرف داریم که به !۵ جایگشت دارند. از طرفی دو حرف «س» و «ت» هم داخل بسته به !۲ جایگشت دارند. در نتیجه داریم:
$5!\times2! = 120\times2 = 240$

۳۹ ۳ چون می‌خواهیم حروف یکسان، کنار هم باشند، دو حرف «د» را یک بسته و سه حرف «ا» را یک بسته در نظر می‌گیریم. در نتیجه این دو بسته با سه حرف «م»، «ر» و «ن» تشکیل ۵ شیء متمایز می‌دهند که به !۵ جایگشت دارند. حروف داخل بسته‌ها هم چون یکسان هستند، جایگشت درون بسته‌ها را نداریم. پس جواب برابر $5!=120$ است.

۴۰ ۳ چون می‌خواهیم عدد ۳۲۱ در همهٔ آن‌ها دیده شود، پس این سه رقم را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم که جایگشتی هم ندارند. حال با سه رقم باقی‌مانده و این بسته !۴ جایگشت خواهیم داشت. پس تعداد اعداد شش رقمی با این شرط برابر است با:
$4! = 24$

۴۱ ۴ باید سه نفر A، B و C به صورت BAC یا CAB کنار هم بنشینند. پس این سه نفر را یک بسته در نظر می‌گیریم که با دو نفر D و E به !۳ جایگشت خواهند داشت. درون بسته هم که ۲ حالت داریم، در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:
$3!\times2 = 6\times2 = 12$

۴۲ ۱ حرف‌های a و c را داخل یک بسته و b و d را هم داخل یک بسته $\boxed{b\ ,\ d}$ و $\boxed{a\ ,\ c}$ در نظر می‌گیریم. پس دو شیء داریم که به !۲ جایگشت دارند. هم‌چنین داخل هر بسته هم به !۲ جایگشت خواهند داشت. در نتیجه داریم:
$2!\times2!\times2! = 2\times2\times2 = 8$

۴۳ - ۲ کافی است تعداد کلمات ۴ حرفی که دو حرف a و c در آن‌ها کنار هم هستند را از تعداد کل کلمات ۴ حرفی کم کنیم. چون می‌خواهیم a و c کنار هم باشند، آن‌ها را با هم داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۳ شیء داریم که به !۳ جایگشت دارند و داخل بسته هم به !۲ جایگشت خواهند داشت. پس داریم:

$$۴! - (\underbrace{۳! \times ۲!}_{\text{a و c کنار هم}}) = ۲۴ - ۱۲ = ۱۲$$

۴۴ - ۳ ابتدا جایگشت این که دو حرف «س» و «گ» کنار هم باشند را به دست می‌آوریم. دو حرف «س» و «گ» را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم، چون می‌خواهیم کنار هم باشند که به !۲ داخل بسته جایگشت دارند. حالا این بسته با ۴ حرف باقی‌مانده به !۵ جایگشت خواهند داشت. در نتیجه تعداد کلمات شش حرفی با این شرط برابر است با:

$$۵! \times ۲! = ۱۲۰ \times ۲ = ۲۴۰$$

حال تعداد کل جایگشت‌های کلمهٔ شش حرفی را به دست آورده و منهای حالت کنار هم می‌کنیم تا تعداد حالت‌هایی که «س» و «گ» کنار هم نیستند به دست بیاید:

$$۶! - ۲۴۰ = ۷۲۰ - ۲۴۰ = ۴۸۰$$

۴۵ - ۳ کتاب‌های هر موضوع را داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۳ بسته داریم که به !۳ جایگشت دارند و داخل هر بسته هم جایگشت داریم:

$$\overset{\text{جایگشت سه بسته}}{۳!} \times \underset{\text{جایگشت کتاب‌های داستان}}{۵!} \times \overset{\text{جایگشت کتاب‌های هنری}}{۳!} \times \underset{\text{جایگشت کتاب‌های علمی}}{۴!} = ۳! \times ۳! \times ۵! \times ۴! = (۳!)^۲ \times ۵ \times ۴! \times ۴! = (۳!)^۲ \times (۴!)^۲ \times ۵ = (۳! \times ۴!)^۲ \times ۵$$

۴۶ - ۲ دو نفر a و b و نفری که قرار است بین آن‌ها سخنرانی کند، داخل یک بسته در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$\square, \boxed{a, \square, b}, \square \Rightarrow \overset{\text{جایگشت a و b}}{۲!} \times \underset{\text{تعداد حالات انتخاب نفر وسط بین a و b}}{۳} \times \overset{\text{جایگشت ۳ شیء}}{۳!} = ۲ \times ۳ \times ۶ = ۳۶$$

۴۷ - ۲ بهترین راه این است که تعداد اعداد سه رقمی که در آن‌ها رقم ۲ به کار نرفته است را از تعداد کل اعداد سه رقمی کم کنیم:

$$\underline{۹} \times \underline{۱۰} \times \underline{۱۰} - \underline{۸} \times \underline{۹} \times \underline{۹} = ۹۰۰ - ۶۴۸ = ۲۵۲$$

میشه بیشتر توضیح بدید که چرا این‌طوری حل کردید؟

پاسخ: بله که میشه. ببین وقتی میگه حداقل یک رقم عدد، ۲ باشه، یعنی یا یک رقم، یا دو رقم یا سه رقم عدد سه رقمی ما باید ۲ باشه. خب می‌تونی این سه تا حالت رو حساب کنی و بعد جوابش رو با هم جمع کنی ولی یه کم راه حلت طولانی و وقت‌گیر میشه. خب ما راه‌حل کوتاه‌تر رو رفتیم. چون اگه کل عددهای سه رقمی رو منهای عددهایی که هیچ رقم ۲ ای ندارن، بکنی، عددهای سه رقمی که یا یکی یا دو تا یا سه تا ۲ دارن و مطلوب ما هم هست به دست میان. حالا بزار راه طولانی رو هم برات بنویسم. این راه رو هم ببین:

۱) عددهای سه رقمی که یک رقم ۲ دارند و ۲ رقم صدگان است: $\underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} = ۸۱$

۲) عددهای سه رقمی که یک رقم ۲ دارند و ۲ رقم دهگان یا یکان است: $\underset{\text{غیر ۲ و صفر}}{\underline{۸}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} + \underset{\text{غیر ۲ و صفر}}{\underline{۸}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} = ۷۲ + ۷۲ = ۱۴۴$

۳) عددهای سه رقمی که دو رقم ۲ دارند: $\underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} + \underset{\text{غیر ۲ و صفر}}{\underline{۸}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} + \underset{۲}{\underline{۱}} \times \underset{\text{غیر ۲}}{\underline{۹}} \times \underset{۲}{\underline{۱}} = ۹ + ۸ + ۹ = ۲۶$

۴) عدد سه رقمی که سه رقم آن ۲ است: ۲۲۲ $\Leftarrow$ ۱ عدد

$\Rightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= ۸۱ + ۱۴۴ + ۲۶ + ۱ = ۲۵۲$

۴۸ - ۱ چون تعداد کتاب‌های ریاضی بیشتر از تاریخ است، پس در ابتدای صف کتاب ریاضی را قرار می‌دهیم و بعد به‌طور یک در میان کتاب‌های تاریخ و ریاضی را می‌گذاریم:

ریاضی ۳	تاریخ ۲	ریاضی ۲	تاریخ ۱	ریاضی ۱

$$۳! \times ۲! = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

۴۹ - ۴ چون تعداد دخترها بیشتر است، در شروع صف، دختر را قرار می‌دهیم و بعد به طور یکی در میان آن‌ها را می‌نشانیم. در نتیجه داریم:

$$۱۰! \times ۹! = ۱۰ \times ۹! \times ۹! = ۱۰ \times (۹!)^۲$$

۵۰ ۲ به دو حالت می‌توان رقم‌های ۲ را یک در میان قرار داد:

$\underline{2}\ \underline{\ \ }\ \underline{2}\ \underline{\ \ }\ \underline{2}\ \underline{\ \ }$

یا

$\underline{\ \ }\ \underline{2}\ \underline{\ \ }\ \underline{2}\ \underline{\ \ }\ \underline{2}$

حال ۳ رقم دیگر را به !۳ حالت در هر کدام از حالت‌های فوق می‌توان بین رقم‌های ۲ جایگشت داد. پس جواب برابر است با:

$3!+3!=6+6=12$

۵۱ ۳ دو حالت درنظر می‌گیریم. ابتدای صف، زن باشد یا ابتدای صف، مرد باشد:

مرد، زن، مرد، زن، مرد، زن، مرد، زن، مرد، زن $\Longrightarrow \underset{\text{مرد}}{5!}\times\underset{\text{زن}}{5!}$

یا

زن، مرد، زن، مرد، زن، مرد، زن، مرد، زن، مرد $\Longrightarrow \underset{\text{مرد}}{5!}\times\underset{\text{زن}}{5!}$

$\Longrightarrow$ تعداد کل حالت‌ها $= 2\times(5!)^2$

۵۲ ۲ در کلمهٔ «آبادان» سه حرف «ا» وجود دارد. در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$\frac{6!}{3!}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=120$

۵۳ ۴ حرف «o» سه بار تکرار شده است، پس تعداد کلمات ۸ حرفی برابر است با:

$\frac{8!}{3!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=6720$

۵۴ ۱

$\frac{8!}{\underset{\text{۳ بار تکرار ۶}}{3!}\times\underset{\text{۲ بار تکرار ۵}}{2!}}=\frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times\cancel{2}}=3360$

۵۵ ۱

$\frac{6!}{\underset{\text{۳ رقم تکراری ۵}}{3!}\times\underset{\text{۲ رقم تکراری ۳}}{2!}}=\frac{6\times5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}\times\cancel{2}_{1}}=60$

۵۶ ۱ در کلمه‌های ۸ حرفی، حروف اول و آخر D هستند، پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را به دست آوریم:

$\frac{6!}{\underset{\text{۳ حرف تکراری A}}{3!}}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=120$

۵۷ ۱ در کلمهٔ ۹ حرفی باید سه حرف اول «راه» باشد. پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را پیدا کنیم:

$\frac{6!}{\underset{\text{۳ حرف «ی»}}{3!}}=\frac{6\times5\times4\times\cancel{3!}}{\cancel{3!}}=120$

۵۸ ۱ حرف آخر که باید «م» باشد. پس جایگشت ۸ حرفی باقی‌مانده برابر است با:

$\frac{8!}{\underset{\text{۲ حرف «ا»}}{2!}\times\underset{\text{۳ حرف «ی»}}{3!}}=\frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3!}}{\cancel{2}\times\cancel{3!}}=3360$

۵۹ ۴ چون حرف اول و آخر باید «m» و «g» باشند، پس باید جایگشت ۸ حرف باقی‌مانده را به دست آوریم. از طرفی ۲بار حرف «i» و ۲ بار حرف «o» تکرار شده است. در نتیجه داریم:

$\frac{8!}{2!\times2!}=\frac{8!}{2\times2}=\frac{8!}{4}$

۶۰ ۴ حرف وسط، N قرار می‌گیرد. پس باید جایگشت ۶ حرف باقی‌مانده را حساب کنیم که چون ۲ حرف E در آن تکرار شده‌اند، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{N}\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \Rightarrow \frac{6!}{2!}=\frac{720}{2}=360$

۶۱ ۲ ۲ تا مداد سیاه را با هم یک بسته در نظر می‌گیریم. پس ۴ شیء داریم که می‌خواهیم آن‌ها را کنار هم بچینیم. از طرفی چون مدادها متمایز نیستند، پس باید جواب را بر جایگشت ۳ مداد قرمز تقسیم کنیم تا حالت‌های مشابه هم حذف شوند در نتیجه تعداد کل حالت‌ها برابر است با:

$\frac{4!}{3!}=4$

دقت کنید که چون ۲ مداد سیاه هم مشابه هستند، پس !۲ جایگشت درون بسته را هم نداریم.

اگر مدادها متمایز بودند، اون وقت جواب چه‌طوری میشه؟

پاسخ: لااقل خودت یه تلاشی بکن تا جواب رو پیدا کنی، اگه نتونستی بپرس. حالا خوب گوش کن ببین چی میگم. وقتی ۲ تا مداد سیاه رو یه بسته در نظر می‌گیریم، ۴ شیء متمایز داریم که به !۴ جایگشت دارند. ۲ تا مداد سیاه هم درون بسته به !۲ جایگشت می‌کنند. پس جواب برابر میشه با:

$۴!\times ۲! = ۲۴\times ۲ = ۴۸$

۶۲ ۲ چهار حرف d، v، n و c بی‌صدا هستند. آن‌ها را کنار هم می‌نویسیم و بین آن‌ها را خالی می‌گذاریم. حالا برای این‌که یکی در میان باشند، سه حرف صدادار a، a و e باید در این سه جای خالی قرار بگیرند و به $\frac{۳!}{۲!}$ جایگشت دارند. در نتیجه داریم:

d—v—n—c

$$\overbrace{۴!}^{\text{جایگشت حروف بی‌صدا}}\times \underbrace{\frac{۳!}{۲!}}_{\text{جایگشت حروف صدادار}} = ۲۴\times ۳ = ۷۲$$

۶۳ ۴ اولین رقم از سمت چپ باید ۲ یا ۳ باشد. از طرفی رقم صفر، ۴ بار تکرار شده است. پس داریم:

$$\frac{\overset{\text{۲ یا ۳}}{۲}\times \overset{\text{جایگشت ۵ رقم بعدی}}{۵!}}{\underset{\text{۴ بار تکرار صفر}}{۴!}} = \frac{۲\times ۵\times \cancel{۴!}}{\cancel{۴!}} = ۱۰$$

۶۴ ۳ بهترین روش حل این است که تعداد کل جایگشت‌های ۶ حرف که البته ۲ حرف A در آن تکراری است را حساب کنیم و بعد تعداد جایگشت‌هایی را که در آن‌ها دو حرف A کنار هم هستند، از آن کم کنیم تا مطلوب مسأله به دست آید. اما برای محاسبهٔ حالتی که A ها کنار هم هستند، این‌طور عمل می‌کنیم که ابتدا Aها را با هم به عنوان یک بسته (شیء) در نظر می‌گیریم. بعد جایگشت ۵ حرف D، H، R، F، AA را محاسبه می‌کنیم، به این صورت هر کلمه‌ای که بنویسیم در آن Aها کنار هم هستند. پس داریم:

$$\frac{۶!}{۲!} - ۵! = \frac{۷۲۰}{۲} - ۱۲۰ = ۳۶۰ - ۱۲۰ = ۲۴۰$$

توجه کنید که جایگشت درون بسته هم نداریم.

۶۵ ۱ برای پیدا کردن تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف A کنار هم نباشند، باید حالت‌های مختلف زیادی را در نظر بگیریم. پس بهتر است تعداد جایگشت‌هایی که دو حرف A کنار هم باشند را پیدا کنیم و از تعداد کل جایگشت‌ها کم کنیم:

$$\overbrace{\frac{۵!}{۲!}}^{\text{تعداد کل جایگشت‌های ۵ حرفی}} - \underbrace{۴!}_{\text{تعداد جایگشت‌های B, R, N, AA}} = \frac{۱۲۰}{۲} - ۲۴ = ۶۰ - ۲۴ = ۳۶$$

۶۶ ۳ تعداد جایگشت‌های حروف کلمهٔ banana برابر است با:

$$\frac{۶!}{\underset{\text{۳ تا حرف a}}{۳!}\times \underset{\text{۲ تا حرف n}}{۲!}} = \frac{۶\times ۵\times \overset{۲}{\cancel{۴}}\times \cancel{۳!}}{\cancel{۳!}\times \underset{۱}{\cancel{۲}}} = ۶۰$$

حال باید عددی ۶ رقمی که دو رقم آن مشابه هم و سه رقم دیگر هم مشابه یک‌دیگر باشند را انتخاب کنیم که تنها گزینهٔ (۳) این شرط را دارد.

۶۷ ۴ اول تعداد حالت‌های وسط کلمه را پر می‌کنیم. پس داریم:

$$\frac{\underline{۶}\times \underline{۵}\times \underline{۴}\times \underset{\text{e یا i}}{\underline{۲}}\times \underline{۳}\times \underline{۲}\times \underline{۱}}{\underset{\text{تکرار دو حرف t}}{۲!}} = \frac{۶!\times \cancel{۲}}{\cancel{۲}} = ۶!$$

۶۸ ۱ چون می‌خواهیم عدد زوج بنویسیم، پس رقم یکان باید زوج باشد. در نتیجه داریم:

$$\frac{۴!\times \overset{\text{رقم یکان}}{۳}}{\underset{\text{۲تا تکرار ۲}}{۲!}\times \underset{\text{۲تا تکرار ۳}}{۲!}} = \frac{\overset{۲}{\cancel{۴}}\times ۳\times \cancel{۲!}\times ۳}{\cancel{۲}\times \cancel{۲!}} = ۱۸$$

۶۹ ۲ چون ۵ رقم داریم و می‌خواهیم عدد چهاررقمی بنویسیم، پس حالت‌های مختلف ممکن را در نظر می‌گیریم:

سه رقم ۵ و یک رقم ۲: $\frac{4!}{3!}=\frac{4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=4$

دو رقم ۵ و دو رقم ۲: $\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{\cancel{4}^{2}\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}_{1}\times \cancel{2!}}=6$

$\Rightarrow$ تعداد کل اعداد $=4+6=10$

۷۰ ۱ حالت‌های مختلف ممکن را در نظر می‌گیریم:

سه رقم ۲ و یک رقم ۱: $\frac{\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underbrace{\underline{3}}_{\text{رقم ۲}}}{3!}=\frac{18}{6}=3$

دو رقم ۲ و دو رقم ۱: $\frac{\underline{3}\times\underline{2}\times\underline{1}\times\underbrace{\underline{2}}_{\text{رقم ۲}}}{2!\times 2!}=\frac{12}{4}=3$

$\Rightarrow$ تعداد کل اعداد $=3+3=6$

۷۱ ۲ ابتدا تعداد حالت‌های مختلف را پیدا می‌کنیم:

۱) سه رقم ۷ و یک رقم ۴: $\frac{4!}{3!}=\frac{4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=4$

۲) سه رقم ۷ و یک رقم ۱: $\frac{4!}{3!}=\frac{4\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}}=4$

۳) دو رقم ۷ و دو رقم ۱: $\frac{4!}{2!\times 2!}=\frac{\cancel{4}^{2}\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}_{1}\times \cancel{2!}}=6$

۴) دو رقم ۷ و یک رقم ۴ و یک رقم ۱: $\frac{4!}{2!}=\frac{4\times 3\times \cancel{2!}}{\cancel{2!}}=12$

۵) یک رقم ۷ و یک رقم ۴ و دو رقم ۱: $\frac{4!}{2!}=12$

سپس مجموع این حالت‌ها را به دست می‌آوریم:

تعداد کل اعداد $=4+4+6+12+12=38$

۷۲ ۳

$$\binom{5}{2}\times\binom{4}{3}\times\binom{3}{1}=\frac{5!}{2!\times 3!}\times 4\times 3=\frac{5\times \cancel{4}^{2}\times \cancel{3!}}{\cancel{2}_{1}\times \cancel{3!}}=10\times 12=120$$

۷۳ ۳ ابتدا ۳ نفر از بین ۶ نفر را برای اتاق ۳ نفره و بعد ۲ نفر از ۳ نفر باقی مانده را برای اتاق ۲ نفره انتخاب می‌کنیم. یک نفری هم که باقی‌مانده در اتاق ۱ نفره قرار می‌دهیم. پس داریم:

$$\binom{6}{3}\times\binom{3}{2}\times\binom{1}{1}=\frac{6!}{3!\times 3!}\times 3\times 1=\frac{\cancel{6}\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{6}\times \cancel{3!}}\times 3=20\times 3=60$$

۷۴ ۴ باید به هر بچه، ۲ تا اسباب‌بازی بدهیم. پس برای بچهٔ اول باید ۲ تا اسباب‌بازی از بین ۶ تا اسباب‌بازی انتخاب کنیم، برای بچهٔ دوم ۲ تا اسباب‌بازی از بین ۴ اسباب‌بازی باقی‌مانده و به بچهٔ سوم، ۲ تا اسباب‌بازی‌ای که باقی‌مانده می‌دهیم. در نتیجه داریم:

$$\binom{6}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{2}{2}=\frac{\cancel{6}^{3}\times 5}{\cancel{2}_{1}}\times\frac{\cancel{4}^{2}\times 3}{\cancel{2}_{1}}\times 1=15\times 6=90$$

۷۵ ۳ ابتدا ۳ مدرسه از بین ۵ مدرسه انتخاب می‌کنیم و بعد از هر کدام از ۳ مدرسه، یک نفر را انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{5}{3}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}\times\binom{4}{1}=\frac{5!}{3!\times 2!}\times 4\times 4\times 4=\frac{5\times \cancel{4}^{2}\times \cancel{3!}}{\cancel{3!}\times \cancel{2}_{1}}\times 64=10\times 64=640$$

میشه بیشتر توضیح بدین چرا این‌طوری حل کردین؟

پاسخ: ببین چون می‌خوایم ۳ دانش‌آموز انتخاب کنیم که دوبه‌دو از یک مدرسه نباشن، پس بهترین راه اینه که اول ۳ تا از ۵ تا مدرسه رو انتخاب کنیم، بعد از هر کدوم از مدرسه‌ها، یک دانش‌آموز رو برداریم. این‌طوری ۳ نفری که انتخاب میشن، قطعاً از ۳ تا مدرسهٔ مختلف هستن.

۷۶ ۲ چون می‌خواهیم دانش‌آموزان غیر هم‌منطقه‌ای باشند، پس ابتدا ۳ منطقه از ۶ منطقه را انتخاب کرده، بعد از هر کدام از این ۳ منطقه، یک دانش‌آموز را از بین ۱۵ دانش‌آموز انتخاب می‌کنیم:

$$\binom{6}{3}\times\binom{15}{1}\times\binom{15}{1}\times\binom{15}{1}=\frac{6!}{3!\times 3!}\times 15\times 15\times 15=\frac{\cancel{6}\times 5\times 4\times \cancel{3!}}{\cancel{6}\times \cancel{3!}}\times 3375=20\times 3375=67500$$